Esecuzione Ottimale di Transazioni Finanziarie in Presenza di Impatto di Mercato

Discussione del Diploma di Licenza

Enzo Busseti

Scuola Normale Superiore

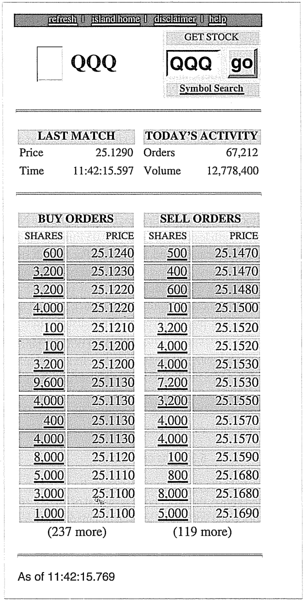
17 Maggio 2012

Traccia

Ho lavorato con il relatore Professor Fabrizio Lillo e collaborato con il gruppo di *Linear Quantitative Research* della banca J.P.Morgan a Londra.

Il problema..

- Un "grande" investitore vuole comprare/vendere *azioni* nel mercato azionario;
- probabilmente non c'è abbastanza *offerta* sul mercato;
- compra/vende in sequenza (*order splitting*).



refresh | island home | disclaimer | help

QQQ

GET STOCK

QQQ go

Symbol Search

LAST MATCH		TODAY'S ACTIVITY	
Price	25.1290	Orders	67,212
Time	11:42:15.597	Volume	12,778,400

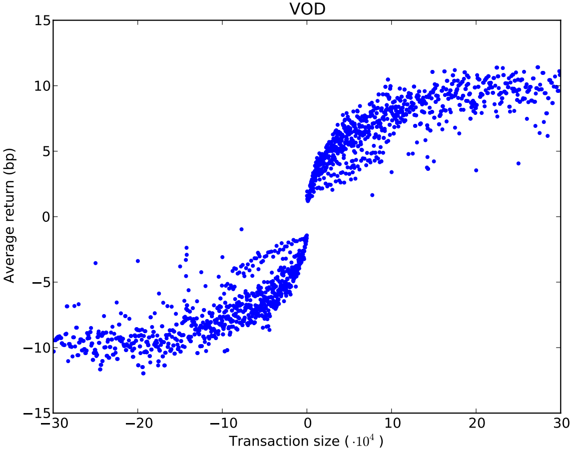
BUY ORDERS		SELL ORDERS	
SHARES	PRICE	SHARES	PRICE
600	25.1240	500	25.1470
3,200	25.1230	400	25.1470
3,200	25.1220	600	25.1480
4,000	25.1220	100	25.1500
100	25.1210	3,200	25.1520
100	25.1200	4,000	25.1520
3,200	25.1200	4,000	25.1530
9,600	25.1130	7,200	25.1530
4,000	25.1130	3,200	25.1550
400	25.1130	4,000	25.1570
4,000	25.1130	4,000	25.1570
8,000	25.1120	100	25.1590
5,000	25.1110	800	25.1680
3,000	25.1100	8,000	25.1680
1,000	25.1100	5,000	25.1690
(237 more)		(119 more)	

As of 11:42:15.769

J.P. Bouchaud and M. Potters. *Theory of financial risk and derivative pricing*, Cambridge University Press.

..e perché è complicato

Le transazioni sul mercato muovono il prezzo (*impatto di mercato*):



E l'impatto può "evolvere" nel tempo.

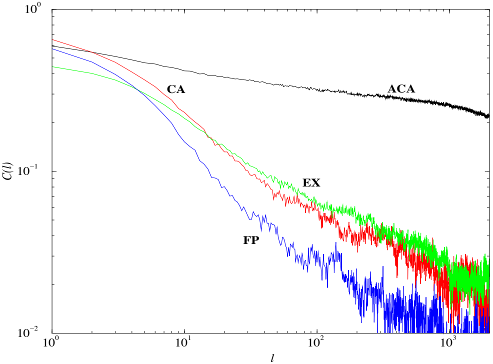
Un apparente paradosso

Potremmo pensare che l'impatto sia *permanente*:

$$p_n = p_{n-1} + \eta_n + f(v_n), \quad \eta_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2).$$

Il flusso degli ordini sul mercato è fortemente *autocorrelato* nel tempo, come si vede dall'autocorrelazione della serie dei segni (acquisto/vendita) delle transazioni:

$$\mathcal{C}(l) = \langle \epsilon_{n+l} \epsilon_n \rangle - \langle \epsilon_n \rangle^2.$$



J.P. Bouchaud, Y. Gefen, M. Potters, and M. Wyart. *Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of random price changes*, Quant. Financ., 4(2):176190, 2004.

Un apparente paradosso

Potremmo pensare che l'impatto sia *permanente*:

$$p_n = p_{n-1} + \eta_n + f(v_n), \quad \eta_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2).$$

Il flusso degli ordini sul mercato è fortemente *autocorrelato* nel tempo, come si vede dall'autocorrelazione della serie dei segni (acquisto/vendita) delle transazioni:

$$\mathcal{C}(l) = \langle \epsilon_{n+l} \epsilon_n \rangle - \langle \epsilon_n \rangle^2.$$

$\Longrightarrow$

Si dimostra che allora anche i movimenti del prezzo sarebbero autocorrelati. Questo non è osservato, e negherebbe l'*ipotesi di mercato efficiente*.

J.P. Bouchaud, Y. Gefen, M. Potters, and M. Wyart. *Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of random price changes*, Quant. Financ., 4(2):176190, 2004.

Propagatore dell'impatto

Serve un modello in cui l'impatto può *decadere* nel tempo. In generale, la dinamica del prezzo è data da:

$$p_n = p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\mathcal{G}(n, k, v_k) + \eta_k \right], \quad \eta_k \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2).$$

In letteratura si è provato che, con buona approssimazione:

$$\mathcal{G}(n, k, v_k) \equiv f(v_k) \cdot G_0(n-k).$$

$$\Downarrow$$

Il *propagatore* G_0 modella la struttura dell'impatto nel tempo.
La funzione di impatto $f(v)$ è la stessa vista prima.

J.P. Bouchaud, J. Kockelkoren, and M. Potters. *Random walks, liquidity molasses and critical response in financial markets*, Quant. Financ., 6(2):115123, 2006.

Come procediamo

Il nostro lavoro originale si concentra sul risolvere il problema dell'esecuzione ottimale con il modello del propagatore:

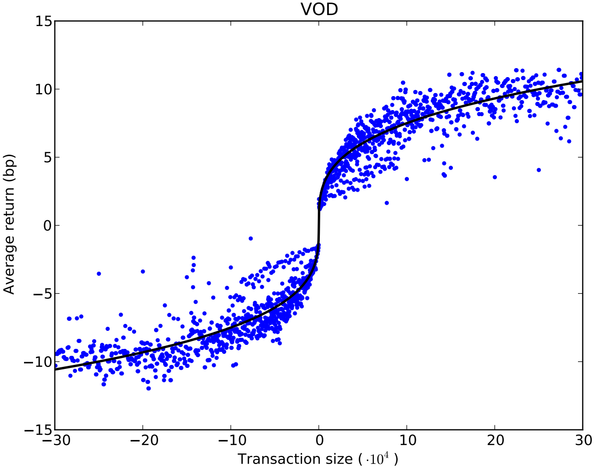
- studiamo come stimare i parametri del modello su dati di transazioni finanziarie;
- effettuiamo queste stime;
- con i parametri ottenuti dalle stime "calibriamo" le strategie ottimali di *trading*.

Stime empiriche

- Abbiamo studiato il modello del propagatore su dati di transazioni britannici e americani:
  - una serie sul *London Stock Exchange*, da maggio 2000 a dicembre 2002;
  - un'altra sul *NASDAQ*, 40 giorni tra luglio e agosto 2009.
- Abbiamo lavorato separatamente sulle due componenti dell'impatto:
  - stima della *funzione di impatto* $f(v)$;
  - stima del propagatore G_0, con una procedura sviluppata da noi (basata sulla regressione lineare).

Stima empirica di $f(v)$

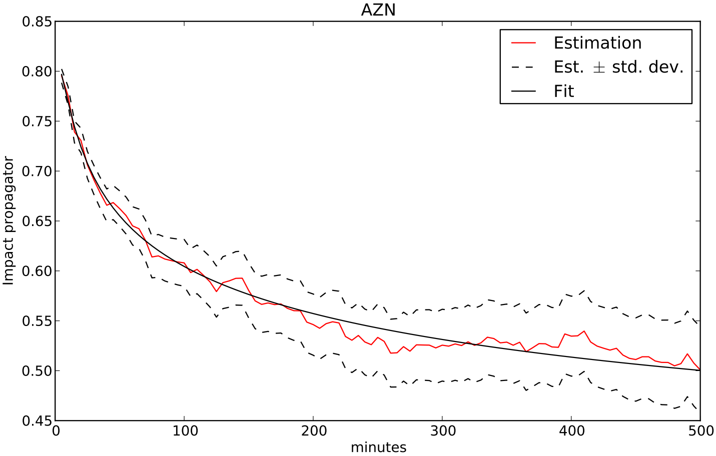
Abbiamo stimato la dipendenza dal volume dell'impatto:



Fittando con $f(v) = \theta \, \mathrm{sign}(v) \cdot |v|^{\phi}$.

Stima empirica di G_0

E abbiamo sviluppato un metodo per stimare l'evoluzione dell'impatto nel tempo:



Fittando con $G_0^{fit}(l) = \frac{\Gamma_0}{(l_0^2+l^2)^{\beta/2}}$.

Introduzione

Impatto di mercato
- Il modello del propagatore
- Stime empiriche

Esecuzione ottimale
- Minimizzare il costo atteso
- Minimizzare costo e rischio

Specifica del problema

- Un investitore vuole acquistare $X > 0$ azioni nel tempo T (diviso in N intervalli);
- si definisce il *programma di trading*, un vettore $\vec{v}$ tale che:

$$X = \sum_{j=0}^{N-1} v_j;$$

- il *costo di esecuzione* è dato da:

$$c(\vec{v}) = (\sum_{k=1}^{N} v_k p_k) - X p_0;$$

- il prezzo è un processo stocastico, perciò ci concentriamo sul valore atteso del costo.

Soluzione classica

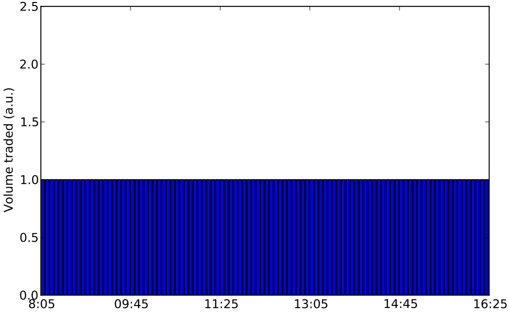
Nel modello classico il prezzo segue: $p_k = p_{k-1} + \theta v_k + \eta_k$.

Il costo atteso e la soluzione ottimale sono:

$$\mathbf{E}\left[C(\vec{v})\right] = \frac{\theta}{2}\left[X^2 + \sum_{k=0}^{N-1} v_k^2\right]$$

$$\Downarrow$$

$$v_k^{OPT} \equiv \frac{X}{N}, \frac{X}{N}, ..., \frac{X}{N}.$$



D. Bertsimas and A. Lo. *Optimal control of execution costs*. J. Financ. Mark., 1(1):150, 1998.

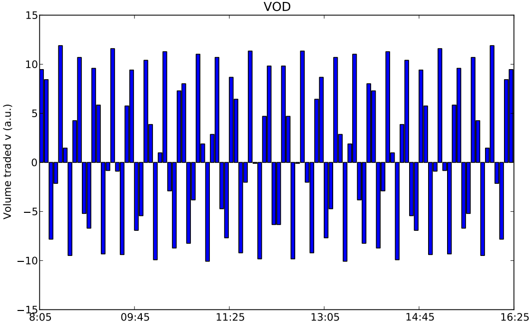
Soluzione nel nostro modello - primo approccio

Nel modello del propagatore il prezzo segue:

$$p_j = p_0 + \sum_{k=0}^{j-1} [\eta_k + f(v_k) G_0(j-k)].$$

Minimizziamo analiticamente il costo di esecuzione:

$$\mathbf{E}[c(\vec{v})] = \sum_{n=0}^{N-1} v_n [\sum_{k=0}^{n} f(v_k) G_0(n-k)].$$

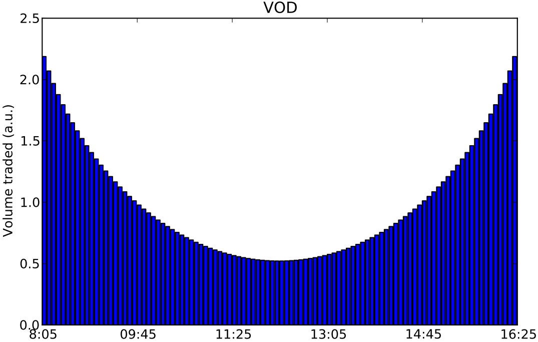


Soluzione nel nostro modello - secondo approccio

Consideriamo anche l'effetto di altri costi di transazione, in particolare il costo dello *spread*:

$$\min_{v_t} \left(\mathbf{E}[c(\vec{v})] + \delta \vec{1}^T |\vec{v}| \right).$$

La funzione costo non si può più minimizzare analiticamente. Usiamo una routine di ottimizzazione numerica.



Confronto con la soluzione classica

	1% volume giornaliero, costo di esecuzione atteso (bp)		
Simbolo	soluzione "flat"	soluzione "U-shaped"	(differenza)
AZN	4.36	4.29	1.63%
VOD	9.82	9.76	0.61%
AMZN	4.09	4.03	1.47%
AAPL	3.17	3.12	1.58%

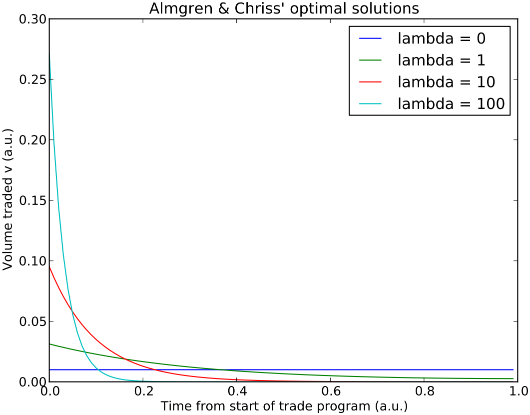
Soluzioni classiche

Si considera il rischio associato ai movimenti casuali del prezzo.

- La varianza $\mathbf{V}[C(\vec{v})]$ è la misura del rischio;
- le soluzioni "ottimali" sono

$$\min_{v_t} \left(\mathbf{E}[C(\vec{v})] + \lambda \mathbf{V}[C(\vec{v})] \right),$$

dove λ è il parametro di *avversione al rischio*.

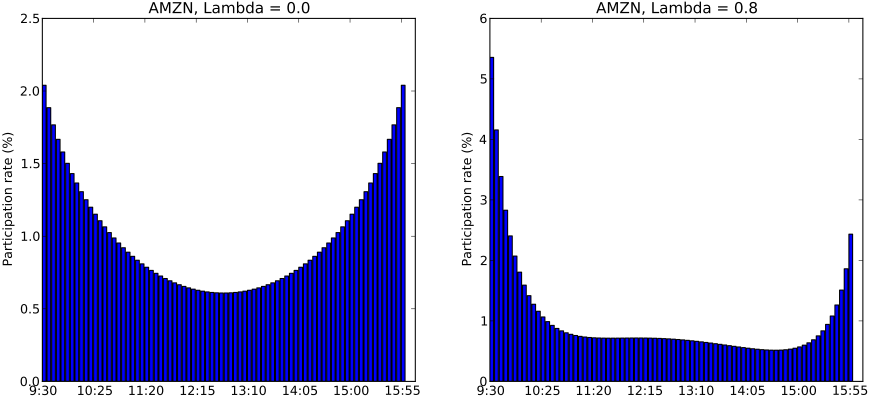


R. Almgren and N. Chriss. *Optimal execution of portfolio transactions*, J. Risk, 3:540, 2001.

Soluzioni nel nostro modello

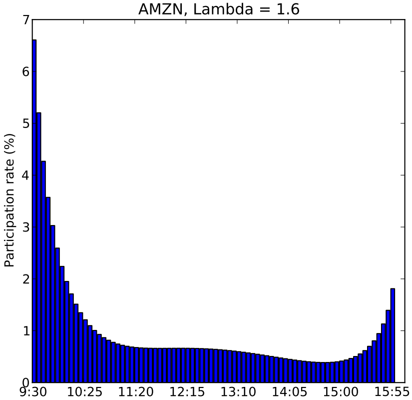
Minimizziamo $\left(\mathbf{E}[C(\vec{v})] + \delta \vec{1}^T |\vec{v}| + \lambda \mathbf{V}[C(\vec{v})]\right)$,

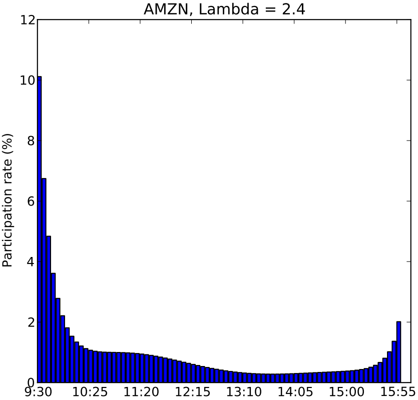
dove $\mathbf{V}[c(\vec{v})] = \sigma^2 \sum_{k=0}^{N-1} (\sum_{j=k}^{N-1} v_j)^2$:



Soluzioni nel nostro modello

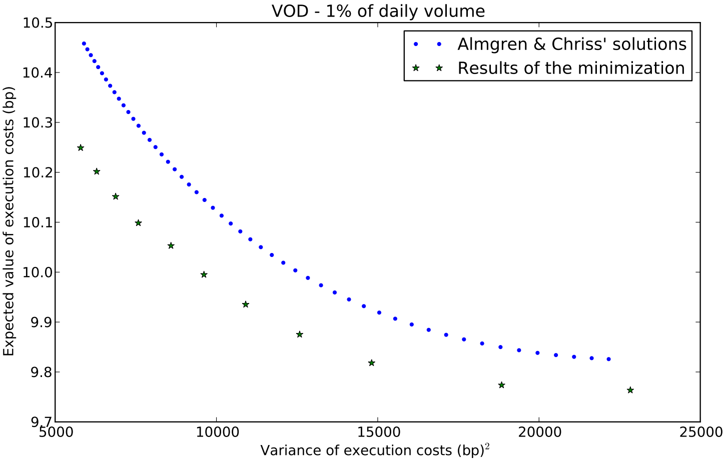
Con coefficienti λ di avversione al rischio più grandi i programmi ottimali sono sempre più *front loaded*:





Confronto con le soluzioni classiche

Vediamo le soluzioni ottimali per diversi valori di λ in un plot costo-varianza:



Conclusioni

In questo lavoro abbiamo:

- sviluppato un nuovo approccio per il problema dell'*esecuzione ottimale*, generale e semplice;
- esteso il modello del propagatore e costruito un sistema per stimarne empiricamente i parametri.

I risultati sono molto incoraggianti:

- le nostre soluzioni ottimali hanno costi di esecuzione più bassi di quelle "classiche";
- il modello dell'impatto spiega bene i movimenti dei prezzi osservati.